

Linear Algebra and Analytic Geometry
Lecture Notes Summer 2026
University of Graz

Özgür Esentepe

March 4, 2026

Chapter 1

Wiederholung

In diesem Kapitel werden wir einige wichtige Begriffe aus dem ersten Semester in Erinnerung rufen, die wir in dieser Lehrveranstaltung benötigen. Genauer gesagt werden wir die Matrixdarstellung linearer Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen wiederholen.

1.1 Matrixdarstellungen

Sei k ein Körper. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow W$ zwischen zwei endlichdimensionalen k -Vektorräumen ist eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}f(x + y) &= f(x) + f(y) \\ f(cx) &= cf(x)\end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$ und $c \in k$.

Gegeben seien eine Basis $\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und eine Basis $\beta = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W . Dann können wir eine (eindeutige) Matrix finden, die diese lineare Abbildung *darstellt*. Aber was bedeutet das? Was heißt es, eine lineare Abbildung zu *repräsentieren*?

1.1.1 Koordinatenvektoren

Beginnen wir mit einer einfacheren Frage. Sei k ein Körper und V ein endlichdimensionaler k -Vektorraum mit einer *geordneten* Basis $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Das bedeutet:

1. B *erzeugt* V . Das heißt, jeder Vektor $v \in V$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren aus B schreiben. Genauer: Zu jedem $v \in V$ gibt es Skalare $a_1, \dots, a_n$, sodass

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n.$$

2. B ist *linear unabhängig*. Das bedeutet: Wenn ein Vektor v als Linearkombination der Vektoren aus B geschrieben werden kann, dann ist diese Darstellung eindeutig. Das

heißt, wenn

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \\ v &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n, \end{aligned}$$

dann gilt $a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$.

Wenn wir also eine Basis $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ des k -Vektorraums V haben und $v \in V$ als

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

schreiben können, dann ist jede Information über den Vektor v durch die Skalare $a_1, \dots, a_n$ gegeben. Wir schreiben dies wie folgt.

Definition 1.1.1. Wir setzen

$$[v]_{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix},$$

wobei $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des k -Vektorraums V ist und $v \in V$ als

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

geschrieben werden kann.

Beachte, dass der Spaltenvektor $[v]_{\mathbf{B}}$ ein Element von k^n ist. Wir nennen ihn den *Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathbf{B}$* .

Remark 1.1.2. Beachte, dass der Koordinatenvektor eines Vektors von der gewählten Basis abhängt. Ändert man die Basis, so ändert sich der Koordinatenvektor im Allgemeinen.

Example 1.1.3. Sei $V = P_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Betrachte die geordneten Basen $\mathbf{B}_1 = \{1, x, x^2\}$ und $\mathbf{B}_2 = \{1 + x, 1 - x, x^2\}$ sowie den Vektor $p = 5 + x + 7x^2$.

Die Frage

$$\text{Bestimme } [p]_{\mathbf{B}_1}.$$

ist äquivalent zur Frage

$$\text{Finde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \text{ mit } p = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2.$$

Daher gilt

$$[5 + x + 7x^2]_{\mathbf{B}_1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Um $[p]_{\mathbf{B}_2}$ zu bestimmen, suchen wir $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit

$$5 + x + 7x^2 = a(1 + x) + b(1 - x) + cx^2.$$

Die rechte Seite können wir als $a + b + (a - b)x + cx^2$ schreiben. Daraus erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ a - b &= 1 \\ c &= 7. \end{aligned}$$

Durch Lösen dieses linearen Gleichungssystems erhalten wir

$$[5 + x + 7x^2]_{\mathbf{B}_2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Der gleiche Vektor p besitzt hier also zwei verschiedene Koordinatendarstellungen.

Lemma 1.1.4. *Die Abbildung $V \rightarrow k^n$, gegeben durch $v \mapsto [v]_{\mathbf{B}}$, ist linear. Tatsächlich ist sie ein Isomorphismus.*

Exercise 1.1.5. Beweise dieses Lemma.

Exercise 1.1.6. In der Vorlesung haben wir besprochen, dass ein großer Teil der linearen Algebra darin besteht, Aussagen in die richtige Sprache zu übersetzen. Oft kann man durch die Frage “Was bedeutet das?” das Problem auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems zurückführen. Diskutiere aus dieser Perspektive den Zusammenhang zwischen “ $\mathbf{B}$ ist eine Basis” und “ $v \mapsto [v]_{\mathbf{B}}$ ist ein Isomorphismus”.

1.1.2 Matrix einer linearen Abbildung

Sei nun $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen über einem Körper k . Sei $\mathbf{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $\mathbf{C} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von W . Dann erhalten wir nach Lemma 1.1.4 ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \sigma_{\mathbf{B}} & & \downarrow \sigma_{\mathbf{C}} \\ k^n & & k^m \end{array}$$

wobei $\sigma_{\mathbf{B}}$ und $\sigma_{\mathbf{C}}$ Isomorphismen sind.

Da $\sigma_{\mathbf{B}}$ ein Isomorphismus ist, besitzt er eine Inverse $\sigma_{\mathbf{B}}^{-1}$. Somit erhalten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \sigma_{\mathbf{B}}^{-1} \uparrow & & \downarrow \sigma_{\mathbf{C}} \\ k^n & \dashrightarrow & k^m \end{array}$$

wobei der gestrichelte Pfeil eine lineare Abbildung $k^n \rightarrow k^m$ ist, gegeben durch die Komposition $\sigma_C \circ f \circ \sigma_B^{-1}$.

Dies ist wiederum eine lineare Abbildung, und aus der linearen Algebra wissen wir, dass jede solche Abbildung durch eine $m \times n$ -Matrix mit Einträgen in k beschrieben wird.

Definition 1.1.7. Wir nennen diese Matrix die *Matrixdarstellung von f bezüglich B und C* .

Dies ist eine gute Definition — aber wie schreibt man diese Matrix konkret auf? Im Folgenden besprechen wir das Vorgehen, geben ein Beispiel und erklären anschließend, woher dieses Vorgehen kommt.