

Übungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie
Sommersemester 2026
Esentepe-Prager

Blatt 2

- (1) Es seien K ein Körper und $V = M_{n \times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in K . Zeigen Sie, dass Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf V ist.
- (2) Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ist A ähnlich zu B ? Falls ja, welche invertierbare Matrix S erfüllt $B = S^{-1}AS$? Falls nein, erklären Sie warum.

- (3) Es seien K ein Körper, $V = M_{n \times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in K und $A, B \in V$. Wahr oder falsch:
- (a) Wenn A ähnlich zu B ist und A invertierbar ist, dann ist auch B invertierbar.
 - (b) Die Menge aller Matrizen, die zu einer Matrix A ähnlich sind, ist ein Unterraum von V .
 - (c) Wenn A zur Nullmatrix ähnlich ist, dann ist A die Nullmatrix.
 - (d) Wenn es nur eine Matrix gibt, die zu A ähnlich ist, dann ist A die Nullmatrix.
- (4) Es seien K ein Körper und $V = M_{n \times n}(K)$ der Vektorraum der $n \times n$ Matrizen mit Koeffizienten in K . Die *Spur* einer $n \times n$ -Matrix $A \in V$ ist die Summe ihrer Diagonaleinträge und wird mit $\text{Spur}(A)$ bezeichnet.
- (a) Es seien $A, B \in V$. Berechnen Sie die Diagonaleinträge von AB und BA . Zeigen Sie, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$.
 - (b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen in V die gleiche Spur haben.
 - (c) Es seien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \pi & \sqrt{2} \\ 71 & 3 & 1 \\ 72 & 43 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{23} \\ 7 & 3 & 8 \\ 21 & 45 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ist A ähnlich zu B ?

- (d) Es sei

$$C = \begin{bmatrix} 3 & \sqrt{3} & \sqrt{23} \\ 7 & 3 & 0 \\ 14 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Ist A ähnlich zu C ?

- (5) Es seien $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit zwei Elementen und $V = M_{2 \times 2}(K)$ der Vektorraum der 2×2 -Matrizen mit Koeffizienten in K . Es gibt 16 Matrizen in V und die Spur einer Matrix ist entweder 0 oder 1.
- (a) Bestimmen Sie alle Matrizen A mit $\text{Spur}(A) = 0$.
 - (b) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen A mit $\text{Spur}(A) = 0$.
 - (c) Bestimmen Sie alle Matrizen A mit $\text{Spur}(A) = 1$.
 - (d) Bestimmen Sie alle invertierbaren Matrizen A mit $\text{Spur}(A) = 1$.
 - (e) Finden Sie alle Äquivalenzklassen von ähnlichen Matrizen in V .