Übungen zur linearen Algebra

Wintersemester 2026

Esentepe – Kouhkouh – Hahn – Pavic – Roche-Newton – Tang – Tran

Blatt 2

Einige Aufgaben auf dem Übungsblatt sind mit einem Stern (*) markiert. Das bedeutet, dass ihr diese Aufgaben an der Tafel präsentieren können sollt, ohne dabei eure Notizen zu verwenden.

(1) (*)

(a) Erklären Sie die Regeln des Spiels Schere–Stein–Papier.

(b) Auf der Menge $M = \{\text{Stein}, \text{Papier}, \text{Schere}\}$ definieren wir eine Operation durch die Regel $a \star b =$ Gewinner von a und b, wobei $a \star a = a$ gilt. Erstellen Sie die 3×3-Operationstabelle für diese Operation.

(c) Zeigen Sie, dass $\star$ kommutativ ist.

(d) Berechnen Sie

$$(\text{Stein} \star \text{Papier}) \star \text{Schere}$$

und

$$\text{Stein} \star (\text{Papier} \star \text{Schere}).$$

(e) Ist $(M, \star)$ eine Gruppe?

(2) (*) Sei $\mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller positiven reellen Zahlen. Mit der gewöhnlichen Multiplikation $\times$ bildet sie eine Gruppe.

(a) Was ist das neutrale Element dieser Gruppe?

(b) Was ist das Inverse von 2 in dieser Gruppe?

(c) Was ist das Inverse einer beliebigen positiven reellen Zahl a in dieser Gruppe?

(d) Ist die Funktion

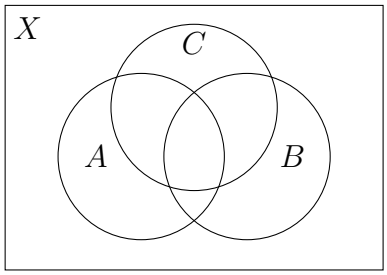
$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}, +) &\to (\mathbb{R}_{>0}, \times) \\ a &\mapsto 2^a \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus?

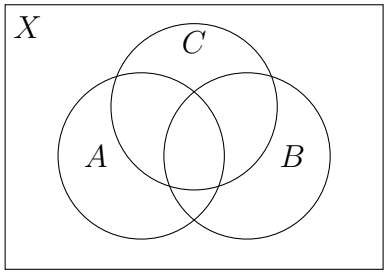
(3) Sei X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von X. Für $A, B \in \mathcal{P}(X)$ definieren wir die symmetrische Differenz durch

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

(a) Die folgende Abbildung zeigt drei Teilmengen A, B, C als Venn-Diagramm. Markieren Sie den Bereich, der $A \setminus B$ entspricht.



(b) Die folgende Abbildung zeigt drei Teilmengen A, B, C als Venn-Diagramm. Markieren Sie den Bereich, der $A \triangle B$ entspricht.



(c) Veranschaulichen Sie anhand eines Beispiels mit einem Venn-Diagramm, dass die Operation $\triangle$ assoziativ ist.

(d) Berechnen Sie $A \triangle \emptyset$ für $A \in \mathcal{P}(X)$.

(e) Berechnen Sie $A \triangle X$ für $A \in \mathcal{P}(X)$.

(f) Berechnen Sie $A \triangle A$ für $A \in \mathcal{P}(X)$.

(g) Bildet $\mathcal{P}(X)$ mit dieser Operation eine Gruppe?

(4) Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1. Wir sagen, dass ein Element $x \in G$ Ordnung 2 hat, wenn $x \neq 1$ und $x^2 = 1$ gilt, wobei x^2 für xx steht. Sei G eine Gruppe mit neutralem Element 1. Wir sagen, dass ein Element $x \in G$ Ordnung 2 hat, wenn $x \neq 1$ und $x^2 = 1$ gilt, wobei x^2 für xx steht.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in G$ gilt:

$$ab = ba \quad \Longleftrightarrow \quad b^{-1}ab = a.$$

(b) Das Zentrum einer Gruppe ist definiert als

$$Z(G) = \{g \in G \colon gx = xg \text{ für alle } x \in G\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Element der Ordnung 2 im Zentrum von G liegt, wenn es in G genau ein Element der Ordnung 2 gibt. Hinweis: Verwenden Sie Teil a).

(c) Geben Sie die Definition einer abelschen Gruppe für eine Person an, die bereits weiß, was eine Gruppe ist.

(d) Zeigen Sie, dass G abelsch ist, wenn jedes Element $g \in G \setminus \{1\}$ die Ordnung 2 hat.

(e) Eine abelsche Gruppe ist nach dem Mathematiker Abel benannt. Schlagen Sie einen alternativen Namen für eine abelsche Gruppe vor. Ihr Name soll kreativ sein und zugleich die definierende Eigenschaft einer abelschen Gruppe verständlich machen. „Kommutative Gruppe“ beschreibt die Eigenschaft zwar treffend, ist aber nicht besonders kreativ. „Özgürische Gruppe“ wäre vielleicht kreativ, erklärt aber die Eigenschaft nicht. Begründen Sie Ihre Wahl.

(5) Sei $G = \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte der Ebene. Für $P, Q \in G$ definieren wir $P \star Q$ als den Mittelpunkt der Strecke, die P und Q verbindet. Das heißt

$$(p_1, p_2) \star (q_1, q_2) = (\frac{p_1 + q_1}{2}, \frac{p_2 + q_2}{2}).$$

(a) Berechnen Sie $(0,0) \star (2,2)$ mithilfe der geometrischen Definition von $\star$. Ist $(0,0)$ das neutrale Element dieser Operation?

(b) Berechnen Sie $(1,3) \star (1,3)$ mithilfe der algebraischen Definition von $\star$.

(c) Zeigen Sie, dass es zu jedem $g \in G$ ein $h \in G$ gibt, sodass $g \star h = h \star g = g$ gilt.

(d) Berechnen Sie $(1,3) \star (2,4)$. Ist $(1,3)$ das neutrale Element dieser Operation?

(e) Sei $P \neq (0,0)$. Berechnen Sie $P \star (0,0)$. Ist P das neutrale Element dieser Operation?

(f) Zeigen Sie, dass G mit dieser Operation keine Gruppe ist.

Ziel dieser Aufgabe ist es, den Unterschied zwischen den folgenden beiden Aussagen zu verdeutlichen:

(a) Für alle $x \in G$ gibt es ein $e \in G$, sodass die Gleichung $xe = ex = x$ gilt.

(b) Es gibt ein $e \in G$, sodass für alle $x \in G$ die Gleichung $xe = ex = x$ gilt.