## Lineare Algebra 1 – WS 2024/25

## Übungsblatt 5 – 27.11.2024

---

**Aufgabe 1**

(a) Erstellen Sie die Verknüpfungstabellen für die Addition und Multiplikation des Körpers $\mathbb{Z}_7$.

(b) Bestimmen Sie $\overline{5}^{-1} \in \mathbb{Z}_7$.

**Aufgabe 2**
Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{4} \\ \overline{3}x & + & y & + & z & = & \overline{0} \\ x & + & y & + & \overline{2}z & = & \overline{3} \end{array} \qquad\qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcl} & & \overline{2}y & + & \overline{2}z & = & \overline{1} \\ \overline{2}x & + & y & & & = & \overline{1} \\ \overline{4}x & + & \overline{2}y & & & = & \overline{2} \end{array}$$

über dem Körper $\mathbb{Z}_5$.

**Aufgabe 3**
Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume?

(a) $A = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 3x_2,\ x_3 = -x_1 \,\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(b) $B = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(c) $C = \{\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0 \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(d) $D = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2 \,\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

(e) $E = \{\, (t, t^3) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R} \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(f) $F = \{\, (t, t + s) \in \mathbb{R}^2 : s, t \in \mathbb{R} \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

**Aufgabe 4**

(a) Es sei $V$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}_2$. Zeigen Sie $v + v = 0$ für alle $v \in V$.

(b) Es sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe mit $v + v = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass es genau eine Möglichkeit gibt, $(V, +)$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ zu machen.

**Aufgabe 5**
Es seien $K$ ein Körper, $X$ eine Menge, und $\mathrm{Abb}(X, K) := \{\, f \mid f\colon X \to K \,\}$ sei die Menge aller Abbildungen von $X$ nach $K$. Für $f,\ g \in \mathrm{Abb}(X, K)$ und $\lambda \in K$ seien $f + g \in \mathrm{Abb}(X, K)$ und $\lambda f \in \mathrm{Abb}(X, K)$ definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x) \quad \text{für alle } x \in K.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Abb}(X, K), +, \cdot)$ ein Vektorraum über $K$ ist.

**Aufgabe 6**

(a) Es seien $K$ ein Körper, $V$ ein $K$–Vektorraum, und $W_1$, $W_2$ zwei Unterräume von $V$. Zeigen Sie, dass folgende drei Aussagen äquivalent sind:

  a) $W_1 \cup W_2$ ist ein Unterraum von $V$.
  b) Es gilt $W_1 \subset W_2$ oder $W_2 \subset W_1$.
  c) Es gilt $W_1 \cup W_2 = W_1$ oder $W_1 \cup W_2 = W_2$.

(b) Geben Sie ein Beispiel für einen Körper $K$, einen $K$–Vektorraum $V$, und drei Unterräume $W_1$, $W_2$, $W_3$ von $V$, sodass $W := W_1 \cup W_2 \cup W_3$ ein Unterraum von $V$ mit $W \neq W_k$ für $k = 1, 2, 3$ ist.