Lineare Algebra 1 – WS 2024/25

Übungsblatt 2 – 6.11.2024

Aufgabe 1
Stellen Sie jeweils für die gegebenen Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ im $\mathbb{R}^3$ fest, ob diese linear unabhängig sind. Drücken Sie andernfalls einen Vektor als Linearkombination der beiden anderen Vektoren aus.

(a)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

(b)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(c)
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 13 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren
$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$
linear unabhängig?

Aufgabe 3
Gegeben sind die Vektoren
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
im $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Aufgabe 4
Es seien $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Wir nennen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ paarweise linear unabhängig, wenn für alle $1 \leq i < j \leq 3$ die Vektoren $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ linear unabhängig sind.
Untersuchen Sie die folgenden beiden Aussagen auf ihren Wahrheitsgehalt (Beweis oder Gegenbeispiel).

(a) Sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ linear unabhängig, so sind sie auch paarweise linear unabhängig.
(b) Sind $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ paarweise linear unabhängig, so sind sie linear unabhängig.

Aufgabe 5
Es sei $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Es seien weiters $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Beweisen Sie, dass es ein $i \in \{1, 2, 3\}$ gibt, so dass $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{e}_i$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 6
Es seien $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ Vektoren im $\mathbb{R}^d$ (mit $d \in \{2, 3\}$). Zeigen Sie:

(a) $\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{w}\| \;\Leftrightarrow\; (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp (\mathbf{v} + \mathbf{w})$.
(b) ist $\mathbf{v} \neq o$ und $\mathbf{w} \neq o$, so gilt
$$\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2} - \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|^2} \right\| = \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|}.$$

Zusatz: Interpretieren Sie (a) geometrisch.