Lineare Algebra 1 – WS 2024/25

Übungsblatt 1 – 30.10.2024

Die Aufgaben 1–6 können mit Schulwissen gelöst werden. Bitte beachten Sie, dass das Übungsblatt aus 2 Seiten besteht.

Aufgabe 1
Gegeben sind die Geraden $p = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ und $q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 5y = 7 \right\}$ im $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie

(a) reelle Zahlen a, b, c, sodass $p = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c \right\}$,

(b) Vektoren v_0, v_1 des Raumes $\mathbb{R}^2$, sodass $q = \{v_0 + tv_1 \mid t \in \mathbb{R}\}$,

(c) den Schnitt der Geraden p und q.

Aufgabe 2
Gegeben sind die Ebenen

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 2 \right\} \text{ und } E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Schnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 3
Begründen Sie, für welche Werte des Parameters $\delta \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & + & \delta y & = & 1 \\ \delta x & + & y & = & -1 \end{array}$$

in den Unbekannten x, $y \in \mathbb{R}$ lösbar ist und bestimmen Sie ggf. die Lösungsmenge.

Aufgabe 4
Es seien $a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots 4$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Lösen Sie:

$$a) \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= a_1 \\ x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= a_2 \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= a_3 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= a_4 \end{aligned}$$

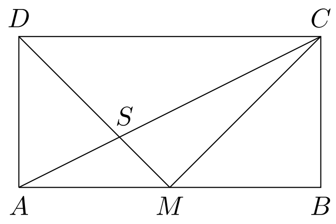
$$b) \quad \begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\qquad &= a \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ &\vdots \\ -x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 0 \\ -x_{n-1} + 2x_n &= b \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Punkte P des $\mathbb{R}^2$, sodass P, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ die vier Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

(b) Bestimmen Sie alle möglichen Paare von Punkten Q, R des $\mathbb{R}^2$, sodass Q, R, $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ die vier Eckpunkte eines Quadrats sind.

Aufgabe 6
Es seien A, B, C und D die Eckpunkte eines Rechtecks (wie üblich im Gegenuhrzeigersinn) mit Flächeninhalt F. Weiters seien M der Mittelpunkt der Strecke AB und S der Schnittpunkt der Strecken AC und DM. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten S, M und C in Abhängigkeit von F.



Aufgabe 7

Zeigen Sie für alle $a,\ b,\ c,\ d,\ e \in \mathbb{R}^2$ und alle $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

(a) $\big((a+b)+c\big)+(d+e)=e+\Big(c+\big((d+a)+b\big)\Big)$.

(b) $a+b=a+c \Longrightarrow b=c$.

(c) $\alpha a=\beta a \Longrightarrow \alpha=\beta \vee a=o$.

(d) $\alpha a=\alpha b \Longrightarrow \alpha=0 \vee a=b$.

Benutzen Sie dazu nur, dass $(\mathbb{R}^2,+)$ eine abelsche Gruppe ist, dass $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ die Eigenschaften (V1), (V2), (V3), (V4) besitzt, sowie die Folgerungen der Vorlesung daraus.